MASTER M2

Mention : Mathématiques et Applications

Le cours de ce master comporte deux unités d'enseignement.

1 Analyse harmonique et fonctions spéciales (AHFS)

Enseignants responsables : **Hamza Chaggara**, **Imed Lamiri** et **Frej Chouchene**.
Nombre d'heures : **90** heures

1.1 Présentation

L'analyse mathématique regroupe sous le terme de fonctions spéciales un ensemble de fonctions analytiques non élémentaires dont l'usage est très fréquent. Parmi ces fonctions, on trouve un grand nombre qui sont des solutions d'équations de la physique mathématique (des équations différentielles du second ordre et des équations aux dérivées partielles d'ordre deux et quatre,...). Ces fonctions sont toutefois très utiles puisque non seulement elles interviennent dans l'expression des solutions exactes de certaines équations aux dérivées partielles pour des conditions aux limites particulières, mais elles fournissent, par le biais des méthodes spectrales, les meilleures approximations numériques pour des conditions aux limites. Certaines d'entre elles jouent également un rôle de premier plan en théorie des nombres. Parmi les fonctions spéciales le plus rencontrées citons :

- Fonctions eulériennes : Gamma, beta, gamma incomplète, digamma,...
- Fonctions d'erreur, sinus intégrale, cosinus intégrale.
- Fonctions hypergéométriques.
- Fonction zêta de Riemann.
- Fonctions cylindriques : Bessel, Hankel,...

Les fonctions spéciales sont définies pour un grand nombre d'entre elles dans les logiciels de calcul symbolique (Maple, Mathematica,...). Notons aussi que certaines familles de polynômes orthogonaux (polynômes de Jacobi, polynômes d'Hermite,...) sont aussi considérées comme des fonctions spéciales.

Les suites de polynômes orthogonaux apparaissent fréquemment en physique mathématique et en mathématiques appliquées. La littérature s'occupant de l'étude de ces suites est trés abondante. Dans ce travail, dans une première étape, on étudie la notion de base dans la théorie générale de polynômes orthogonaux. En particulier, on étudie les polynômes orthogonaux classiques, la caractérisation d'une suite polynomiale orthogonale, ainsi que le tableau d'Askey qui regroupe tous les polynômes hypergéométriques orthogonaux. Dans une deuxième étape, on considère une généralisation de la notion d'orthogonalité. Il s'agit de la d-orthogonalité introduite par Van-Isegham et Maroni. Cette notion est à la base de la définition et de l'étude des approximantes de Padé vectoriels, des fractions continues généralisées et des approximantes rationnelles simultanées. Les polynômes d-orthogonaux constituent une classe adéquate pour discuter des exemples des polynômes poly-orthogonaux. Dans ce travail, en considérant des problèmes de caractérisation, on introduit plusieurs classes des polynômes d-orthogonaux permettant de donner l'analogue du tableau d'Askey dans le contexte de d-orthogonalité.

On définit les polynômes de Jacobi-Dunkl qui sont liés aux polynômes de Jacobi et on donne, pour ces polynômes, des relations de récurrence, des formes explicites, un comportement asymptotique et une représentation intégrale de type Laplace. Les polynômes de Jacobi-Dunkl sont les fonctions propres de l'opérateur de Jacobi-Dunkl qui est un opérateur différentiel et aux différences. On étudie aussi l'analyse harmonique (une branche des mathématiques qui a une interaction avec l'analyse, l'algèbre, la géométrie et la physique mathématique) associée à cet opérateur. Plus précisément, on montre pour la transformation de Jacobi-Dunkl une formule d'inversion, une formule de Plancherel et un théorème de Paley-Wiener.

1.2 Programme

1. Etude de quelques fonctions spéciales
   (a) Notions préliminaires : Fonctions complexes - Produit infini.
   (b) Fonction eulériennes : Fonction gamma, fonction beta.
   (c) Fonctions hypergéométriques - Transformations hypergéométriques.
   (d) Fonctions de Bessel et fonctions hypergéométriques confluentes.
2. Généralités sur la théorie des polynômes orthogonaux
   (a) Fonctions génératrices.
   (b) Orthogonalité par rapport à un produit scalaire.
   (c) Polynômes orthogonaux : Théorie générale.
   (d) Polynômes orthogonaux classiques : Cas continue et cas discret.
   (e) Tableau d'Askey.
   (f) Problèmes de caractérisation.
3. Polynômes de Jacobi et de Jacobi-Dunkl
   (a) Polynômes de Jacobi.
      i. Relations de récurrence.
      ii. Formes explicites.
      iii. Bornes et comportement asymptotique.
      iv. Représentation intégrale de Laplace.
      v. Nouvelle transformation d'Abel et son dual.
   (b) Polynômes de Jacobi-Dunkl.
      i. Relations de récurrence.
      ii. Formes explicites.
      iii. Bornes et comportement asymptotique.
      iv. Représentation intégrale de Laplace.
4. Transformation de Jacobi-Dunkl et applications
   (a) Formule d'inversion.
   (b) Formule de Plancherel.
   (c) Théorème de Paley-Wiener.
   (d) Applications.
5. Notion de la d-orthogonalité
   (a) Généralités.
   (b) Relation de récurrence d'ordre $d + 1$.
   (c) Détermination du vecteur fonctionnel.
   (d) Problèmes de caractérisation.
   (e) Tableau d-Askey.
6. Problèmes de connexion et de linéarisation
   (a) Suites canoniques des polynômes.
   (b) Principe de quasi-monomialité et applications.
   (c) Polynômes hypergéométriques et ses q-analogues : q-analogue du tableau d'Askey.
   (d) Problèmes de connexion et de linéarisation : Différentes techniques de résolution.
   (e) Utilisation du calcul symbolique (Linear Computer Algebra) pour l'étude des problèmes de connexion et de linéarisation.
   (f) Extension aux q-polynômes.

2 Introduction à l'analyse et la géométrie différentielle complexe (IAGDC)

Enseignants responsables : **Jawher El Goul**, **Fredj Elkhadhra** et **Fathi Haggui**.
Nombre d'heures : **90** heures

2.1 Présentation

Le but de cours sera de présenter quelques aspects de l'analyse et de la géométrie complexe, notamment les fonctions holomorphes de plusieurs variables, les fonctions plurisousharmoniques, la théorie des courants et les éléments fondamentaux de la géométrie différentielle.
Cette formation est ouverte à des collaborations :
- Laboratoire d'Analyse Complexe de l'université Joseph Fourier (Institut Fourier) sous la responsabilité du Professeur J.P. Demailly.
- Laboratoire d'Analyse Complexe de Toulouse sous la responsabilité du Professeur Ahmed Zeriahi.

2.2 Programme

1. Introduction sur les fonctions holomorphes de plusieurs variables complexes (c'est une généralisation de la théorie des fonctions holomorphes d'une variable complexe), théorème de Hartogs
2. Fonctions sousharmonique et fonctions plurisousharmoniques (c'est le cône des fonctions sousharmoniques sur chaque direction complexe).
3. Notion de variété réelle ou complexe de dimension arbitraire. Partition de l'unité, fibrés tangents et cotangents, notion de sous-variétés et champs de vecteurs. Exemples : espaces projectifs réels et complexes, tores, et leurs sous-variétés.
4. Formes différentielles et calcul différentiel extérieur dans les ouverts de $\mathbb{R}^n$ et de $\mathbb{C}^n$.
5. Courants sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et courants sur un ouvert de $\mathbb{C}^n$. Depuis 1957, De Rham a introduit l'espace de courants comme étant le dual topologique de l'espace des formes différentielles, par analogie avec la définition habituelle des distributions.
6. Positivité des formes différentielles et des courants. Exemples fondamentaux des courants positifs fermés.
7. Opérateur de Monge-Ampère complexe, nombre de Lelong et capacité. Il s'agit de présenter la théorie de Bedford-Taylor-Demailly sur l'intersection des courants et sur la capacité de Monge-Ampère associée à un courant positif fermé.
8. Groupes de cohomologie de de Rham et de Dolbeault. Il s'agit de présenter la cohomologie des espaces des formes différentielles sur une variété complexe.
9. Les faisceaux et leurs groupes de cohomologie. La théorie des faisceaux permet d'étudier facilement des problèmes qui ont des caractères à la fois locaux et globaux.
10. Les diviseurs et les fibrés en droites sur une variété complexe compacte. L'étude des diviseurs d'une variété complexe, qui sont une généralisation de ses hypersurfaces, permet de connaître une grande partie de sa géométrie.

2.3 Prérequis

1. Notions de calcul différentiel (difféomorphisme, théorème des fonctions implicites).
2. Théorie des fonctions holomorphes d'une variable complexe.
3. Théorie des distributions.

2.4 Références

[1] J.P. Demailly, Complex Analytic and Differential Geometry.
[2] Ph. Griffiths, J. Harris, Principles of Algebraic Geometry, Wiley, New York (1978).
[3] L. Hormander, An introduction to Complex Analysis in several variables, 3rd revised edition, North-Holland Math. Library, Vol. 7, Amsterdam (1990).
[4] R.O. Wells, Differential analysis on complex manifolds, Graduate Texts in Math. 65, 2nd edition, Springer-Verlag, Berlin (1980).

Répartition

Semaine	AHFS	IAGDC
1	Imed Lamiri (6h)	Fathi Haggui (6h)
2	Imed Lamiri (6h)	Fathi Haggui (6h)
3	Imed Lamiri (6h)	Fathi Haggui (6h)
4	Hamza Chaggara (6h)	Fathi Haggui (6h)
5	Hamza Chaggara (6h)	Jawher El Goul (6h)
6	Frej Chouchene (6h)	Jawher El Goul (3h) + Fredj Elkhadhra (3h)
7	Frej Chouchene (6h)	Fredj Elkhadhra (6h)
8	Frej Chouchene (6h)	Fredj Elkhadhra (6h)
9	Frej Chouchene (6h)	Fredj Elkhadhra (6h)
10	Frej Chouchene (6h)	Fredj Elkhadhra (6h)
11	Imed Lamiri (6h)	Jawher El Goul (6h)
12	Imed Lamiri (6h)	Jawher El Goul (6h)
13	Hamza Chaggara (6h)	Jawher El Goul (6h)
14	Hamza Chaggara (6h)	Jawher El Goul (6h)
15	Hamza Chaggara (6h)	Jawher El Goul (6h)